

第六章恆星演化的終點

The end-points of stellar evolution

不同質量恆星的一生，會歷經不同階段的核融合，這些融合過程，只是展延恆星的生命而已，當它最後用盡所有可用的核燃料後，恆星一定要死亡。恆星演化末期的緻密天體有白矮星、中子星和黑洞，本章將介紹它們的一些特性。

內容

▪ 白矮星

- 質量和核心密度
- 質量與半徑

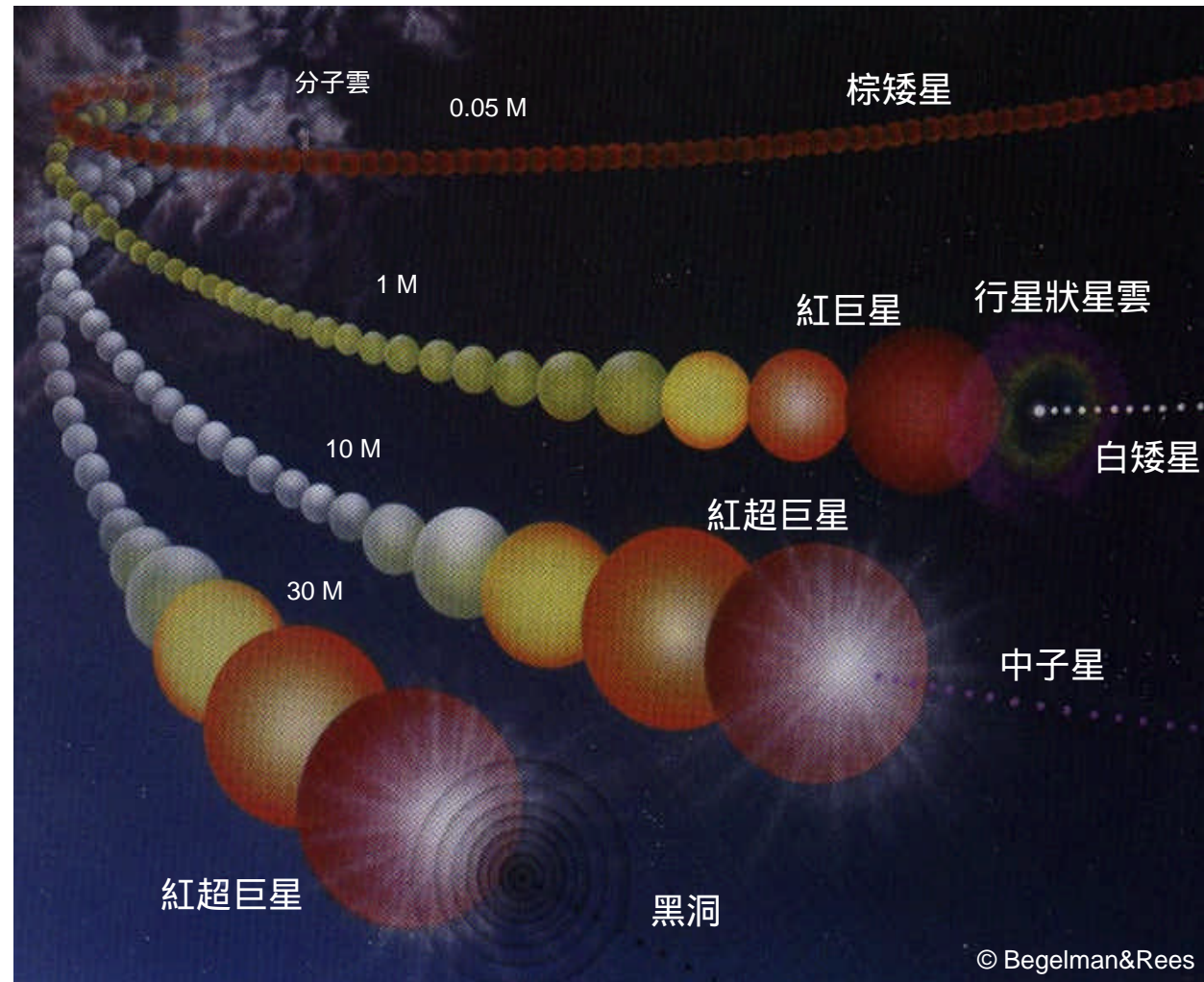
▪ 恆星核心的崩潰

- 崩潰的起點
- 光分解
- 電子捕獲
- 落幕

▪ 中子星

- 中子星物質
- 大小
- 重力位能
- 中子星與波雲
- 質量上限

▪ 黑洞



白矮星的發現和特性

White dwarfs (I)

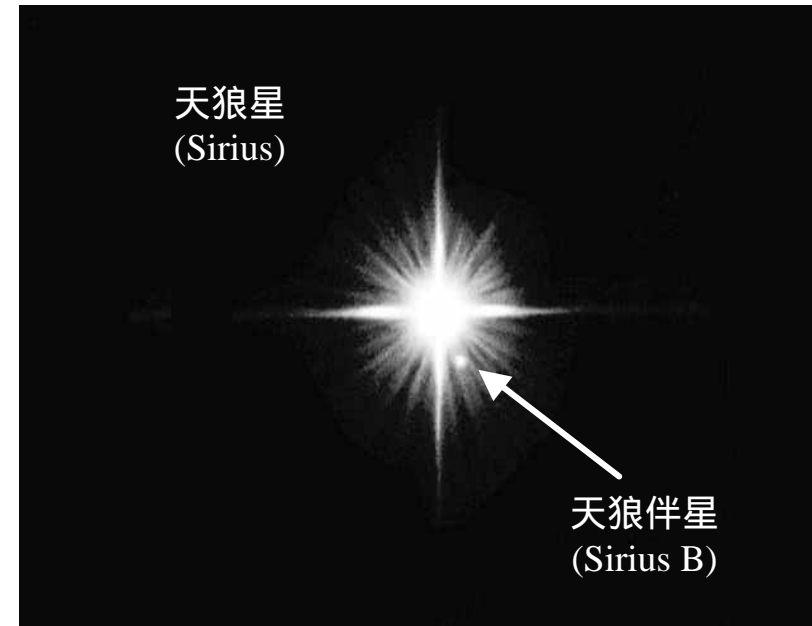
天狼星及天狼伴星

1838年，天文學家貝索用視差法量出天鵝座61星的距離後，緊接著量測天狼星，卻發現它的軌跡會晃動，經過數年的精密觀測後，雖然沒有直接看到天狼伴星，不過確定了天狼星是個週期50年的雙星系統。1862年，美國天文學家克拉克在測試望遠鏡時，才無意中觀測到天狼伴星。錢卓拉遠在1931年就預測白矮星質量的上限為 $1.1M_{\odot}$ ，觀測結果支持這項理論。

白矮星的大小和密度

天狼伴星是離我們最近的白矮星，它的質量為1.05倍太陽質量，發光強度是 $0.03L_{\odot}$ ，而表面溫度高達27,000度。因為 $L = 3.826 \times 10^{26} \text{ J/s}$ ，所以可以找出天狼伴星的半徑大約是5500公里，只有地球半徑的85%。另外 $M = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$ ，在知道了天狼伴星的半徑後，不難算出它的密度高達 $3 \times 10^9 \text{ kg/m}^3$ 。

中心星 vs 白矮星



白矮星的質量與核心密度

White dwarfs (II)

- 組成：He, C/O (classical gases)、 e-gas (quantum gas)

of e⁻ per nucleon

- 壓力：主要來自e-gas，電子氣密度(5.6) $n_e = Y_e \frac{r_c}{m_H}$; $Y_e = 1/2 [1 + X_1]$

- QNR e-gas, $P_e = K_{QNR} n_e^{5/3} = K_{QNR} \left[\frac{Y_e r_c}{m_H} \right]^{5/3}$; $K_{QNR} = \frac{h^2}{5m_e} \left[\frac{3}{8p} \right]^{2/3}$

如壓力全部來自e-gas，

$$K_{QNR} \left[\frac{Y_e r_c}{m_H} \right]^{5/3} \approx \left[\frac{p}{36} \right]^{1/3} GM^{2/3} r_c^{4/3}$$

因此，白矮星核心的密度和質量之間的關係為

$$\boxed{r_c \approx \frac{3.1 \left[\frac{M}{M_*} \right]^2 m_H}{(h/m_e c)^3}} \quad \begin{cases} a_G = \frac{Gm_H^2}{\hbar c} \\ M_* = a_G^{-3/2} m_H = 1.85 M_{sun} \end{cases}$$

- 上述結果只對質量遠小 M_* 的白矮星才下確 (細節參考2.2節)，也就是說

$$p_F = \left[\frac{3n}{8p} \right]^{1/3} \hbar \ll m_e c \quad \Rightarrow n = \frac{r_c}{\bar{m}} \ll \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 \quad \Rightarrow r_c \ll \frac{m_H}{(h/m_e c)^3}$$

因為滿足這個條件，才能被歸類為QNR e-gas

例子：0.4 M 的白矮星

White dwarfs (III)

$$Y_e = 1/2 [1 + X_1] = 1/2 [1 + 0] = 1/2$$

$$\begin{aligned} r_c &\approx \frac{3.1}{Y_e^5} \left[\frac{M}{M_*} \right]^2 \frac{m_H}{(h/m_e c)^3} = \frac{3.1}{0.5^5} \left[\frac{0.4}{1.85} \right]^2 \frac{m_H}{(h/m_e c)^3} = 4.6 \frac{m_H}{(h/m_e c)^3} \\ &= 5.4 \times 10^8 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

$$p_F = \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{1/3} h = 0.65 m_e c; \quad E_p^{K.E.} = \sqrt{p_F^2 c^2 + m_e^4 c^4} - m_e c^2 = 0.19 m_e c^2$$

- 就是質量只有0.4 M 的白矮星核心，電子氣已經不再是QNR e-gas，其行為需考慮相對論性效應
- 可見質量超過0.4 M 的白矮星，其相對論性效應會更明顯

錢氏極限 (白矮星的質量上限)

White dwarfs (IV)

- 由果壓力主要是由QUR e-gas所提供

$$P = K_{QUR} n_e^{4/3} = K_{QUR} \left[\frac{Y_e r_c}{m_H} \right]^{4/3}; \quad K_{QUR} = \frac{hc}{4} \left[\frac{3}{8p} \right]^{1/3}$$

- 達成靜能平衡時

$$K_{QUR} \left[\frac{Y_e r_c}{m_H} \right]^{4/3} \approx \left[\frac{p}{36} \right]^{1/3} GM^{2/3} r_c^{4/3}$$

$$\text{適用範圍? } p_F = \left[\frac{3n}{8p} \right]^{1/3} h \gg m_e c \quad \Rightarrow n = \frac{r_c}{\bar{m}} \gg \left(\frac{m_e c}{h} \right)^3 \Rightarrow r_c \gg \frac{m_h}{(h/m_e c)^3}$$

- 此情況發生時，系統的 $E_{\text{tot}} \approx 0$ ，這個極限稱為Chandrasekhar limit (1931)

$$K_{QUR} \left[\frac{Y_e}{m_H} \right]^{4/3} \approx \left[\frac{p}{36} \right]^{1/3} GM_{CH}^{2/3}$$

$$M_{CH} = \left[\frac{36}{p} \right]^{1/2} \left[\frac{Y_e}{m_H} \right]^2 \left[\frac{K_{QUR}}{G} \right]^{3/2} = 2.3 Y_e^2 M_* = 4.3 Y_e^2 M_{sun} \xrightarrow{Y_e=1/2} M_{CH} = 1.1 M_{sun}$$

廣義法的白矮星質量上限

White dwarfs (V)

- 恆星內部的壓力完全是由簡併電子氣所提供，每個粒子的能量 $e_p = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}$

- 第2.1節，
$$p = -\frac{\partial E}{\partial V} = -\int_0^\infty \frac{de_p}{dV} f(e_p) g(p) dp = \frac{1}{3V} \int_0^{p_F} \frac{p^2 c^2}{e_p} g(p) dp$$

上式用到
$$\frac{de_p}{dV} = \frac{de_p}{dp} \frac{dp}{dV} = \frac{d\sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}}{dp} \cdot \left(-\frac{p}{3V}\right) = \frac{pc^2}{e_p} \cdot \left(-\frac{p}{3V}\right) = -\frac{p^2 c^2}{e_p} \cdot \frac{1}{3V}$$

$$g(p) = g_s \frac{V}{h^3} 4\pi p^2$$

定義 $x = p/m_e c$

$$P = \frac{1}{3V} \int_0^{p_F} \frac{p^2 c^2}{(p^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{1/2}} \cdot 2 \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \int_0^{x_F} \frac{x^4}{(1+x^2)^{1/2}} dx$$

請注意：
$$x_F = \frac{p_F}{m_e c} = \left[\frac{3n_e}{8\pi} \right]^{1/3} \frac{h}{m_e c} = \left[\frac{3Y_e r_c}{8\pi m_H} \right] \frac{h}{m_e c}$$

$$P = K_{QUR} n_e^{4/3} \frac{4}{x_F^4} \int_0^{x_F} \frac{x^4}{(1+x^2)^{1/2}} dx = K_{QUR} n_e^{4/3} I(x_F)$$

從習題2.3 \Rightarrow
$$I(x) = \frac{3}{2x^4} \left[x(1+x^2)^{1/2} \left(\frac{2x^2}{3} - 1 \right) + \ln \left[x + (1+x^2)^{1/2} \right] \right]$$

廣義法的白矮星質量上限

White dwarfs (VI)

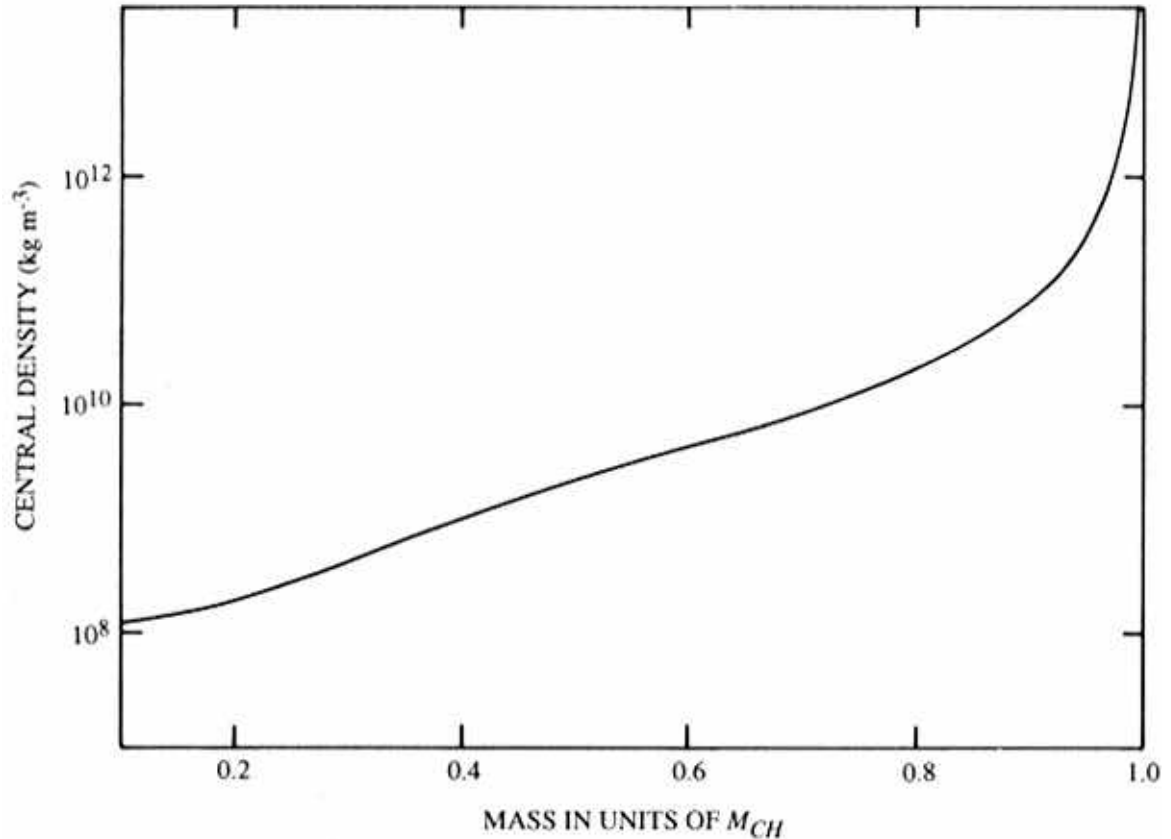
- QNR極限 , $x_F = \frac{\rho_F}{m_e c} \ll 1$
- QUR極限 , $x_F = \frac{\rho_F}{m_e c} \gg 1$
- 介於兩之間的通式
$$P = K_{QUR} n_e^{4/3} I(x_F)$$
$$\approx \left[\frac{\rho}{36} \right]^{1/3} G M^{2/3} r_c^{4/3}$$

可以改寫成

$$M \approx [I(x_F)]^{3/2} M_{CH}$$

當 $Y_e = 0.5$ 時 , 恆心的密度和

白矮星質量的關係如右圖



- 可以發現當質量趨近於 $1 M_{CH}$ 時 , 核心密度發生發散的現象 !

- 如用 polytrope model , 可得 $M_{CH} \approx 3.1 Y_e^2 M_* = 5.8 Y_e^2 M_{sun} \xrightarrow{Y_e=0.5} M_{CH} = 1.4 M_{sun}$

白矮星的質量與半徑

White dwarfs (VII)

- 從核心密度和白矮星質量的關係式(6.4)或圖一，可知密度隨著質量而急遽上昇，這也隱喻白矮星的半徑隨著質量增加而下降，如何加以定量描述？

- 如果核心壓力來自QNR e-gas, $P \propto r^{5/3}$

從polytrope model可證明 $\langle r \rangle = 1/6 r_c$

$$r_c = 6 \langle r \rangle = \frac{3.1 \left[\frac{M}{M_*} \right]^2}{Y_e^5} \frac{m_H}{(h/m_e c)^3} \Rightarrow \langle r \rangle = 0.51 \left[\frac{M}{M_*} \right]^2 \frac{m_H}{(h/m_e c)^3}$$

- 半徑

$$R = \left[\frac{3M}{4p \langle r \rangle} \right]^{1/3} \approx 0.77 Y_e^{5/3} \left[\frac{M_*}{M} \right]^{1/3} a_G^{-1/2} \frac{h}{m_e c} \quad \begin{cases} M_* = a_G^{-3/2} m_H \\ a_G = \frac{Gm_H^2}{hc} \end{cases}$$

$$a_G = 5.9 \times 10^{-39} \quad \& \quad \frac{h}{m_e c} = 2.4 \times 10^{-12} \text{ m} \quad \Rightarrow \quad a_G^{-1/2} \frac{h}{m_e c} = 3.1 \times 10^7 \text{ m}$$

- 白矮星的特徵密度 $\frac{m_H}{(h/m_e c)^3} = 1.2 \times 10^8 \text{ kg/m}^3$

- 白矮星的半徑和質量之關係 $R = \frac{R_{sun}}{74} \left[\frac{M_{sun}}{M} \right]^{1/3}$; if $Y_e = 0.5$

白矮星的半徑、光度

White dwarfs (VIII)

- 白矮星質量與半徑的關係 $R \xrightarrow{Y_e=0.5} \frac{R_{sun}}{74} \left[\frac{M_{sun}}{M} \right]^{1/3} \Rightarrow MV = constant$
亦指質量和體積的乘積為常數
- 證據顯示觀測到的白矮星質量皆未超過 $1.4 M_{\odot}$ ，而且質量愈大半徑愈小

TABLE 6.1 White dwarf masses and radii from optical observations. See Shapiro and Teukolsky (1983) for further details.

White dwarf	Mass	Radius
Sirius B	$(1.053 \pm 0.028) M_{\odot}$	$(0.0074 \pm 0.0006) R_{\odot}$
40 Eri B	$(0.48 \pm 0.02) M_{\odot}$	$(0.0124 \pm 0.0005) R_{\odot}$
Stein 2051	$(0.50 \pm 0.05) \text{ or } (0.72 \pm .08) M_{\odot}$	$(0.0115 \pm 0.0012) R_{\odot}$

- 白矮星的光度

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \Rightarrow L = \left(\frac{R}{R_{sun}} \right)^2 \left(\frac{T_e}{T_{sun}} \right)^4 L_{sun} = \frac{1}{74^2} \left(\frac{M_{sun}}{M} \right)^{2/3} \left(\frac{T_e}{6000} \right)^4 L_{sun}$$

例：質量為 $0.4 M_{\odot}$ 的白矮星，表面溫度為 $10,000 \text{ K}$ ，求光度。

$$L = \frac{1}{74^2} \left(\frac{M_{sun}}{0.4 M_{sun}} \right)^{2/3} \left(\frac{10000}{6000} \right)^4 L_{sun} = 2.6 \times 10^{-3} L_{sun}$$

白矮星的光度與表面溫度

White dwarfs (IX)

- 右式(6.25)指出白矮星的光度 $L = \frac{1}{74^2} \left(\frac{M_{sun}}{M} \right)^{2/3} \left(\frac{T_e}{6000} \right)^4 L_{sun}$ 和 T_e^4 成正比，冷卻行為應如圖6.2所示。

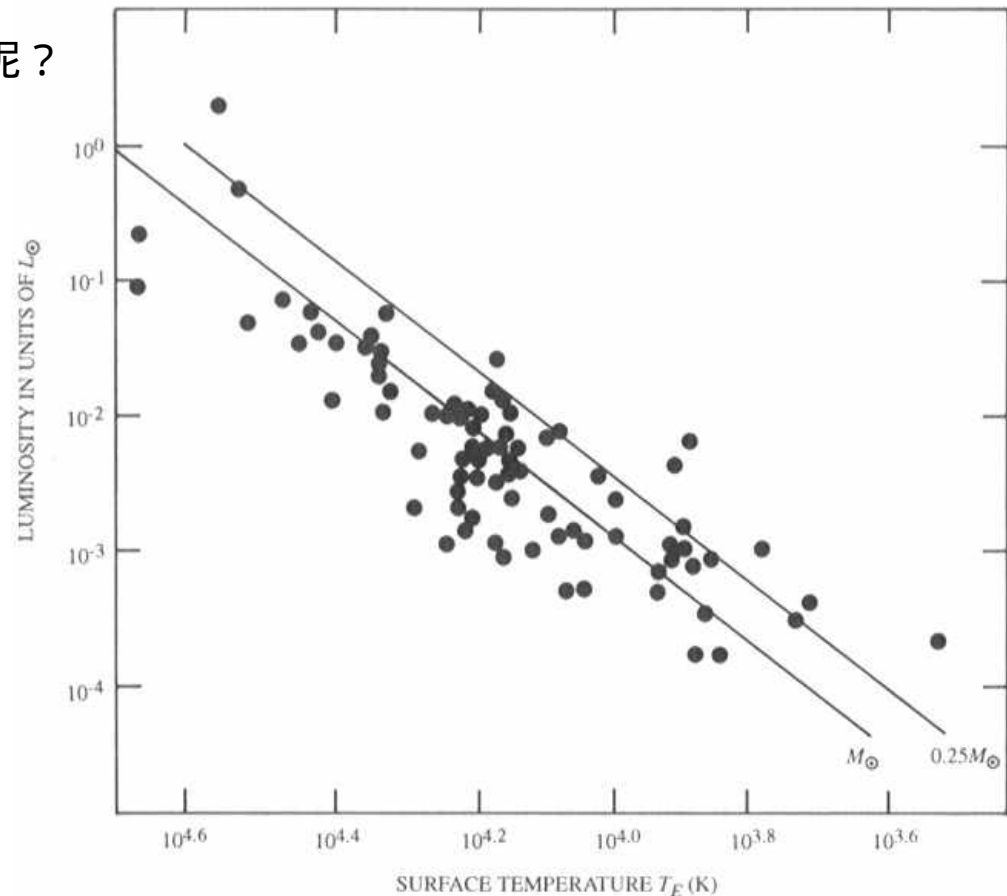
- 為何特別標出圖上的二種質量的白矮星呢？

- 白矮星的質量不應超過 $1.4 M$
- 宇宙年？如果~130億年，恆星恰好在現在變成白矮星所擁有的質量為

$$t(\text{life}) = 13 \text{ byrs} = \left(\frac{M}{M_{sun}} \right)^{-2.5} t_{sun}$$

$$\Rightarrow M \approx 0.25 M_{sun}$$

- 推導(6/25)式時，並沒有考慮粒子的相對論性效應，否則 $1 M$ 線會向左正方移動(Shapiro & Teukolsky, 1983)。



白矮星光譜線的重力紅位移

White dwarfs (X)

- 白矮星的質量-重力關係，可以用來估計白矮星表面的重力場強度和所造成的重力紅位移
- 白矮星表面的重力場強度

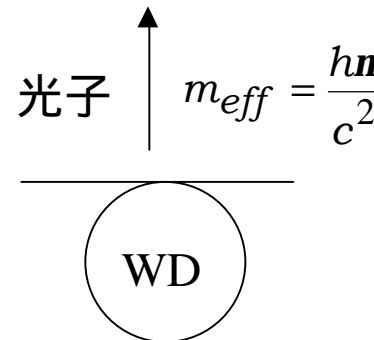
$$g = \frac{GM}{R^2}; \quad \frac{g}{g_{sun}} = \left(\frac{M}{M_{sun}} \right) \left(\frac{R_{sun}}{R} \right)^2 \quad \text{hence} \quad \frac{R_{sun}}{R} = 74 \left(\frac{M}{M_{sun}} \right)^{1/3}$$

$$g \approx 74^2 \left(\frac{M}{M_{sun}} \right)^{5/3} \frac{GM_{sun}}{R_{sun}^2}$$

例：質量 $0.4 M$ 的白矮星， $g = 4 \times 10^5 \text{ m/s}^2$ 。

- 重力紅位移 $\Delta I = I - I_0$ ，廣義相對論 $\Rightarrow \frac{\Delta I}{I_0} = \left[1 - \frac{2GM}{Rc^2} \right]^{-1/2} - 1 \approx \frac{GM}{Rc^2}$
- Naïve picture (簡易物理圖像)

$$E = h\nu - \frac{GMm_{eff}}{R} = h\nu'$$



白矮星光譜線的重力紅位移

White dwarfs (XI)

- 紅位移量

$$\Delta n = n' - n = -\frac{GMm_{eff}}{hR} = -\frac{GMn}{Rc^2}$$

- 代入

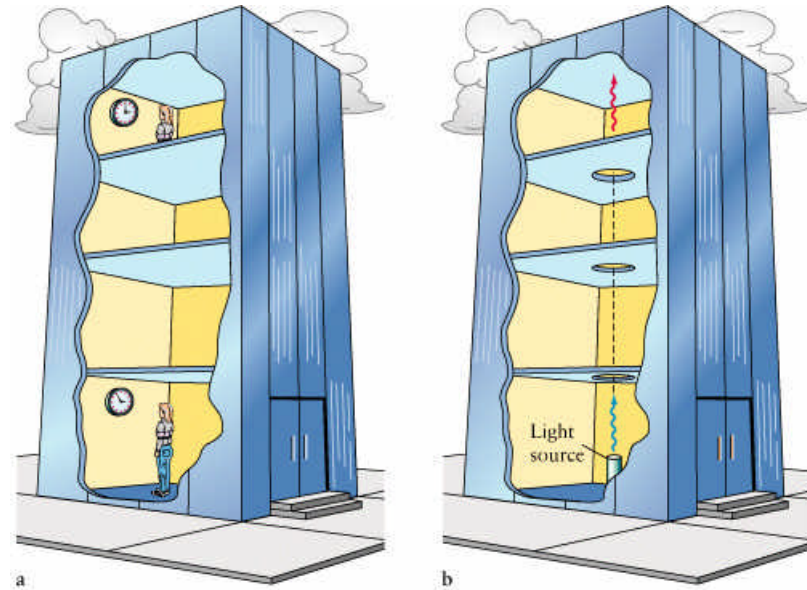
$$R = \frac{1}{74} \left[\frac{M_{sun}}{M} \right]^{1/3} R_{sun}$$

$$\frac{\Delta I}{I_0} \approx 74 \left[\frac{M}{M_{sun}} \right]^{4/3} \frac{GM_{sun}}{R_{sun}c^2}$$

- 例：40 Eri B，一顆 $0.48 M$ 的白矮星

$$\frac{\Delta I}{I_0} = 7.47 \times 10^{-5} \quad (\text{observation})$$

$$\frac{\Delta I}{I_0} = 6 \times 10^{-5} \quad (\text{naive theory})$$

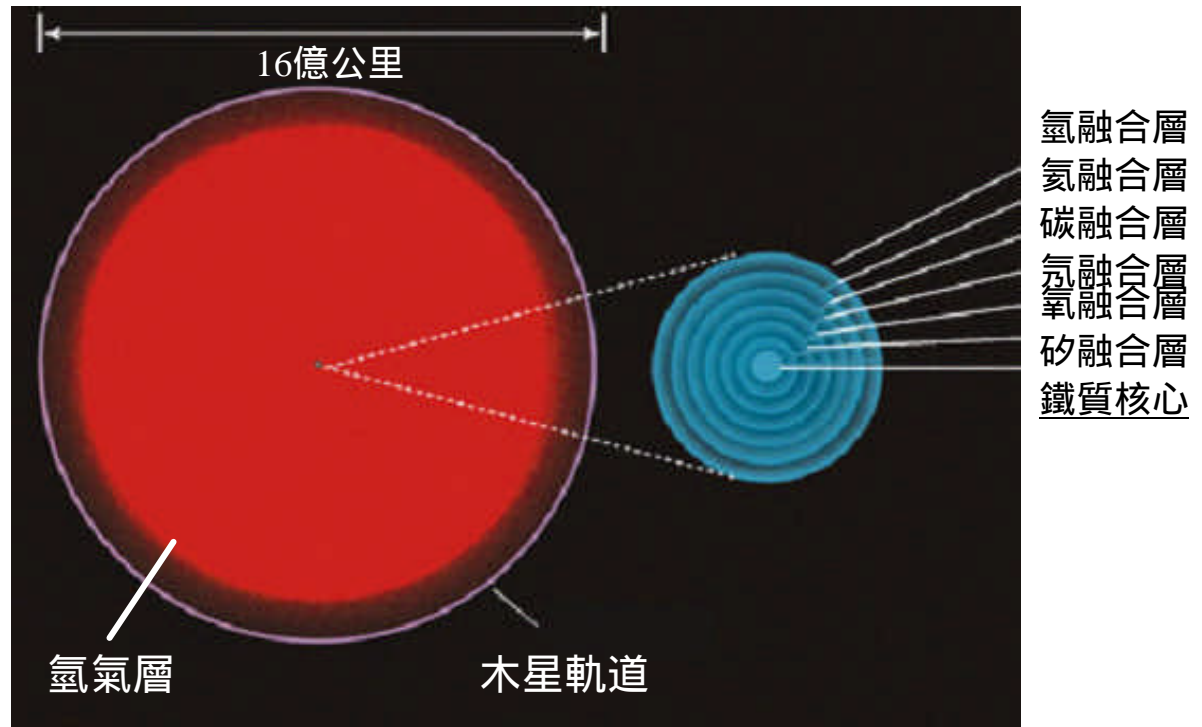


據廣義相對論，重力場強處的鐘比重力場弱的鐘走得慢。而光由強重力場區攀昇到弱重力場區，光會發生重力紅位移(圖 Freedman 6/e)。

老年期大質量恆星的核心

- Collapse of a stellar core (I)

- 質量大於 $11 M$ 的恆星，在後主序星階段會經歷各種核融合，從氫、碳、氖、氧、矽融合，並形成多層球結構，上一層的融合產物成為下一層融合的燃料。
- 鐵核是一種束縛最緊的系統，並無法進行融合以抵抗重力的擠壓，所以隨著鐵核的質量增加，核心持續收縮，重力位能轉變成動能，核心的溫度不停地上昇。
- 隨著核心鐵核增大，到質量超過 $1.4 M$ 時，簡併電子氣所產生的壓力，已不足以抗衡重力，鐵核即將發生崩潰。
- $T > 3 \times 10^9$ K 的環境中，光子的能量高到可以分子原子核，這種吸能過程，會降低核心的壓力，加速核心的崩潰。
- 此外電子捕獲(中子化過程)，釋出的微中子也會帶出能量。



原子核的光分解

- Collapse of a stellar core (II)

- 當鐵核發生光分解和電子捕獲(中子化)時，就好像核心啟動了兩個冷卻機制，氣體壓力驟降，鐵核以近乎自由落體的方式向中心崩潰。此時核心的物質密度大約為 10^{12} kg/m^3 。

- 核心的自由下落時間為 $t_{FF} = \left[\frac{3p}{32Gr} \right]^{1/2} \approx 10^{-3} \text{ s}$

- 鐵原子核的光分解 $g + {}^{56}\text{Fe} \leftrightarrow 13 {}^4\text{He} + 4n$

- 此一吸熱反應(endothermic reaction)，所吸收的能量為

$$Q = (13 m_4 + 4 m_1 - m_{56})c^2 = 124.4 \text{ MeV} , \text{ 而每kg鐵原子核可以吸收 } Q \times 1/56m_H = 2.1 \times 10^{14} \text{ J}$$

- 在溫度 T 時，被分解的鐵原子之比率如下：如 $g_1 = 2, g_4 = 1, g_{56} = 1$

$$m_{56} = 13m_4 + 4m_1; \quad m_A = m_{AC}^2 - kT \ln \left[\frac{g_A n_{QA}}{n_A} \right] \& n_{QA} = \left[\frac{2p m_A kT}{h^2} \right]^{3/2}$$

$$\frac{n_4^{13} n_1^4}{n_{56}} = \frac{g_4^{13} g_1^4}{g_{56}} \frac{n_{Q4}^{13} n_{Q1}^4}{n_{Q56}} \exp[-Q/kT]$$

原子核的光分解

- Collapse of a stellar core (III)

- 鐵核： $\rho = 10^{12} \text{ kg/m}^3$ 、 $T = 10^{10} \text{ K}$

$$n_{56} = \frac{10^{12}}{56 \times 1.67 \times 10^{-27}} = 1.07 \times 10^{37} \text{ 1/m}^3; \quad kT = 1.38 \times 10^{-13} \text{ J} = 0.863 \text{ MeV}$$

$$n_{QA} = \left(\frac{2pm_A kT}{h^2} \right)^{3/2} = \left(\frac{2pm_H kT}{h^2} \right)^{3/2} A^{3/2} = 1.89 \times 10^{41} A^{3/2} \text{ 1/m}^3$$

- 如果假設有 x 比例的鐵原子核被光分解

$$\frac{(13xn_{56})^{13}(4xn_{56})^4}{n_{56}} = 16 \cdot \frac{4^{39/2} n_{Q1}^{17}}{56^{3/2} n_{Q1}} \exp(-144)$$

$$x^{17} = \frac{8.8 \times 10^{12}}{3.03 \times 10^{14} \cdot 256 \cdot 419} \left(\frac{1.89 \times 10^{41}}{1.07 \times 10^{37}} \right)^{16} \exp(-144) \quad \Rightarrow x = 0.86$$

- 所以有86%的 ^{56}Fe 被分解(課本說~75%，請檢查數值計算)
- 類似的，氦原子核的光分解 $g + {}^4\text{He} \leftrightarrow 2p + 2n$ 也同理可求。

光分解所吸收的能量

- Collapse of a stellar core (IV)

- 如果鐵核的質量為 $1.4 M$
- 鐵原子核完全被分解要吸收的能量

$$E = \frac{1.4M_{sun}}{m_{56}} \cdot 124.4 \text{ MeV} \approx 4 \times 10^{44} \text{ J}$$

- 氦原子核完全被分解要吸收的能量

$$E = \frac{1.4M_{sun}}{m_4} \cdot 26 \text{ MeV} \approx 1 \times 10^{45} \text{ J}$$

- 鐵核崩潰的過程中，原子核的光分解吸收了 $1.4 \times 10^{45} \text{ J}$ 的能量
- 因為太陽的光度 $3.86 \times 10^{26} \text{ W}$ ，相當於吸收了太陽在100億年間產生的能量
- 因此，鐵核的崩潰幾乎是像自由落體般的內爆

貝他衰變和反貝他衰變

- Collapse of a stellar core (V)

- 自由中子的半衰期為10.25 min，衰變的過程 $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ，釋放出的電子和微中子之能量總和為1.3 MeV，射出電子最高的能量小於1.3 MeV，為中子和質量之間的質量差。

- 在高度演化恆星的核心，電子的密度非常高，電子海幾乎全滿，中子無法衰變
- 電子恰好填滿能量1.3 MeV以下軌道之密度

$$e_F = 1.3 \text{ MeV} = \sqrt{p_F^2 c^2 + m_e^2 c^4}; \quad p_F = \left[\frac{3n_e}{8\pi} \right]^{1/3} h; \quad n_e = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{p_F}{h} \right)^3 = 7.6 \times 10^{36} \text{ 1/m}^3$$

- 當電子密度超過此一臨界值時，電子可用中子捕獲，成為反貝衰變的過程，或稱中子化過程 (neutronization) $e^- + p \leftrightarrow n + \nu_e$
- 在高度演化恆星的核心，中子化的過程發生鐵原子核內
- 物質密度高達 $1.1 \times 10^{12} \text{ kg/m}^3$ 時， $e_F = m_e c^2 + 3.7 \text{ MeV}$ (^{56}Mn 和 ^{56}Fe 的質量差)，恰好可以觸發中子化 $e^- + ^{56}\text{Fe} \rightarrow ^{56}\text{Mn} + \nu_e$

電子捕獲/中子化

- Collapse of a stellar core (VI)

- 通常 ^{56}Mn 會在2.6小時內衰變回 ^{56}Fe ，但在物質密度達到 $1.5 \times 10^{13} \text{ kg/m}^3$ 且自由電子瀰漫的星核中，很快又捕捉一個電子形成 ^{56}Cr ($e^- + ^{56}\text{Mn} \rightarrow ^{56}\text{Cr} + n_e$)
- 在物質密度達到 10^{14} kg/m^3 時，中子化的過程進行的非常迅速，所產生的微中子幾乎毫無阻礙地飛離星核，帶來電子所擁有的能量，造成一陣高流量的微中子流，同時也加速星核的崩潰
- **微中子帶走的能量** (如鐵核具有錢氏質量 $1.4 M_\odot$ ，所含的電子數約為 10^{57} ，也產生約 10^{57} 微中子，並假設電子的平均能量為 10 MeV ；物質密度 $2 \times 10^{13} \text{ kg/m}^3$ 時電子氣的平均能量)

$$E_{e\text{-capture}} \approx 10^{57} \cdot 10 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{45} \text{ J}$$

- 由於此時星核物質的密度非常高，微中子不能無礙地飛離，在星核內爆的過程中，據理論計算，如果鐵核的密度為 10^{14} kg/m^3 半徑數公里，微子中的自由程和鐵核的大小相當，且會被陷住數秒。

星核內爆的落幕式

- Collapse of a stellar core (VII)

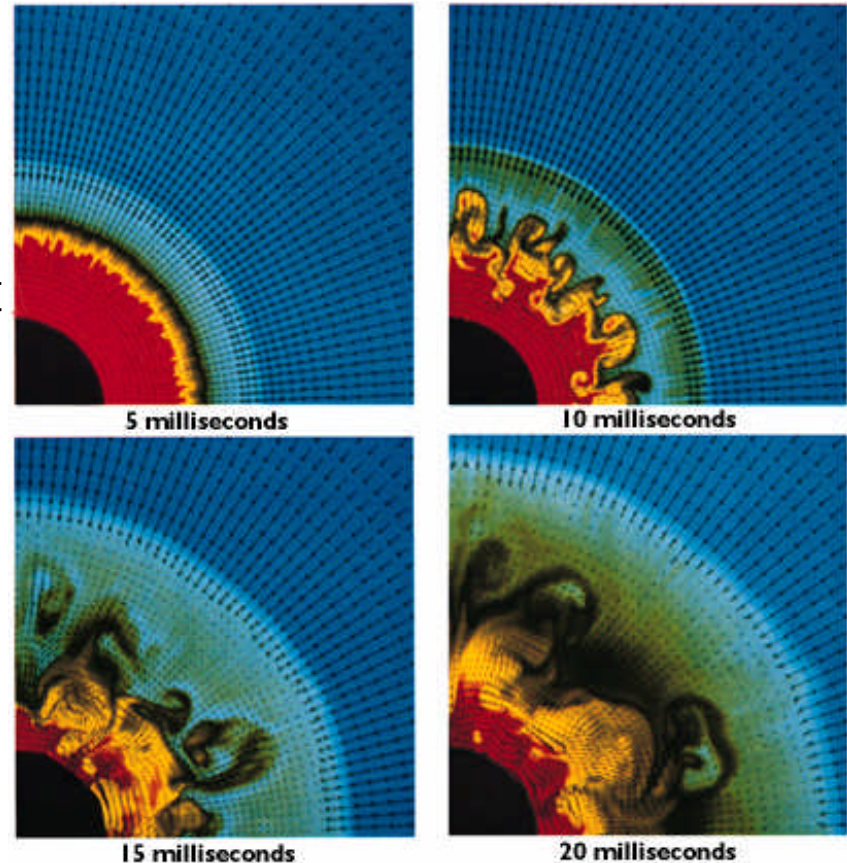
- 原子核的光分解和質子捕獲電子的中子化過程，讓大質量恆星的鐵核在千分之一秒就完成內爆，但過程如何被停止？內爆物質的密度達到原子核物質密度時，內爆會停止並反彈

- 原子核的物質密度：原子核半徑的半實驗公式 $R = r_0 A^{1/3}$; $r_0 = 1.2 \times 10^{-15} \text{ m}$

$$\rho_{nuclear_matter} = \frac{Am_n}{4/3 \pi R^3} = \frac{3m_n}{4\pi r_0^3} = 2.3 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$$

- 到目前為止，我們一直說核力是核子間的束縛力，不過當核子靠得太近，核力有一個很強的斥力，會阻擋鐵核持續內爆並發生劇烈反彈，產生向外傳播的震波(shock wave)。理論與數值模擬計算的結果顯示，震波足以恆星物質的掉落，使它們轉向，轉而產生外爆 超新星爆炸

超級電腦模擬的超新星核心。紅色為 $T = 2 \times 10^{10} \text{ K}$ 的區域，藍色 $T = 6 \times 10^8 \text{ K}$ ，物質從密度和原子核物質相當的核心(黑色)反彈，形成向外傳的震波，並產生擾流(A. Burrows – GSFC/NASA)。



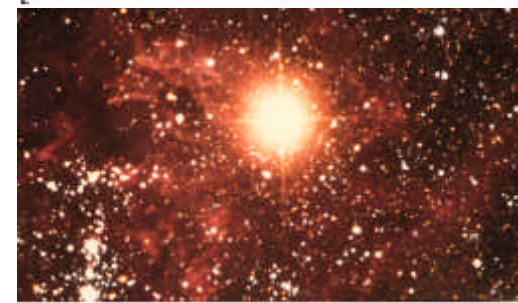
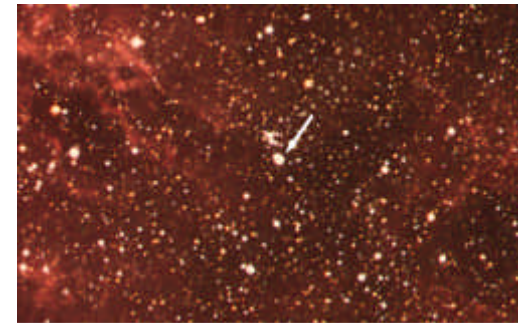
超新星爆炸

- Collapse of a stellar core (VIII)

- 觀測的典型碎片動能 $\sim 10^{44}$ J，第一年的可見光能量 $\sim 10^{42}$ J
- 一年 $\sim 10^8$ s，故 $L_{\text{SN}} \sim 10^{34}$ W $\approx 10^8 L$
- 根據光譜可分成 type-I SN (I_a , I_b and I_c) 和 type-II SN 等兩大類
- I_a SN 是發生內爆的白矮星，其前身是中小質量的恆星
- I_b 、 I_c 和 II，是來自大質量恆星核心的內爆



- ✓ SN 1987A: type II SN
- ✓ 可見光發現：1987年02月23日10:35 UT
- ✓ 來源：LMC
 - 距離 – 170,000光年 (Tarantula nebula, LMC)
 - 前導星 – Sanduleak –69 202 (藍超巨星)
 - $M_{\text{pregen}} \approx 20 M_{\text{sun}}$
- ✓ SN 1604以後第一顆目視超新星
- ✓ 用所有現代天文儀器觀測研究的第一顆超新星



超新星的分類

- Collapse of a stellar core (IX)

▪ Type-I supernovae

特徵：最大亮度時，無氫譜線，代表恆星已無氫

Ia: strong Si-line at 6150 埃
(發生在各式各樣的星系中，由白矮星內爆而來。以C/O白矮星為例，吸積主星物質到超過 $1.4 M_{\odot}$ ，內爆溫度急遽升高，觸發碳和氧融合，由於電子氣的高熱傳導特性，恆星各處同時發生融合，造成一個恆星大小的核子彈，把白矮星炸得片羽不留。)

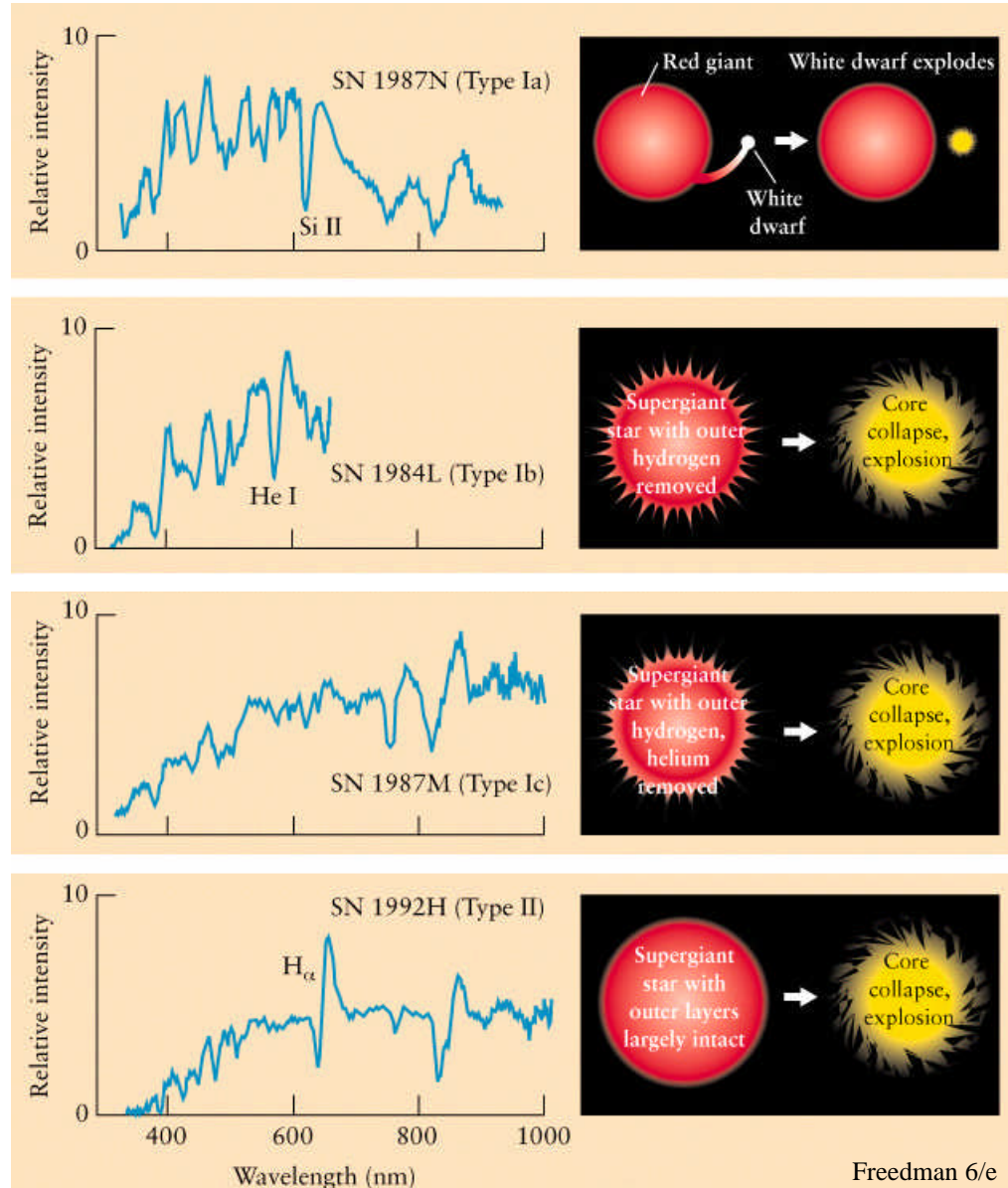
Ib: 有He-line

Ic: 無 He-line

(Ib & Ic出現在螺旋星系的恆星形成區/HII region，前導星為失去外層氣殼的大質量恆星)

▪ Type-II SN

有很強的氫線，前導星為尚未失去外層氫氣殼的大質量恆星



Type-II 超新星的最後一秒

- Collapse of a stellar core (X)

- 鐵核的內爆、反彈、激震波過程很複雜，我們現在甚至還不能確定內爆釋放出來的巨量重力位能，如何傳到恆星的外層並把物質拋出去。也因此，我們也無法確定內爆一定會產生！
- 無論如何，內爆預期會留下一個殘核 中子星或黑洞。
- 形成中子星應釋出多了能量？內爆前，鐵核的質量和太陽相當，如果半徑是1000 km，內爆後，假如質量如前，但半徑縮成10 km。相較之下，內爆前的重力位能可忽略(1/100)，而釋放出重力能量恰好是中子星的束縛能。

$$E_B \approx \frac{GM^2}{R} = \frac{GM_{\text{sun}}^2}{10 \text{ km}} \left(\frac{M}{M_{\text{sun}}} \right)^2 \left(\frac{10 \text{ km}}{R} \right) \text{ J}$$

- $R = 10 \text{ km}$ ，所以 $E_B = 2.64 \times 10^{46} \text{ J}$ 。前面提到SN爆炸，碎片的動能 $\sim 10^{44} \text{ J}$ ，而第一年的可見光能量 $\sim 10^{42} \text{ J}$ ，那麼超過90%的能量到那裡去了！
- 目前認為是由三個家族的六種微中子 ($n_e, \bar{n}_e, n_m, \bar{n}_m, n_t, \bar{n}_t$)，每種各帶來 $\sim 0.5 \times 10^{46} \text{ J}$ 的能量。
- 熱中子星的溫度 $\sim 10^{11} \text{ K}$ ，物質密度 $\sim 10^{14} \text{ kg/m}_3$ ，微中子可以對生，所以微中子都是擴散出去的，穿過半徑 R 的中子星時之平均自由程為 $\bar{\ell}$ ，反應的次數為 $R^2 / \bar{\ell}^2$ ，走 $\bar{\ell}$ 要用掉 $\bar{\ell}/c$ 的時間，所以逃離所用掉的時間為 $t_{\text{escape}} \approx \frac{R^2}{\bar{\ell}^2} \cdot \frac{\bar{\ell}}{c} = \frac{R^2}{\bar{\ell}c}$
- 所以內爆真正重要的落幕式是微中子而不是可見光的超新星爆炸！

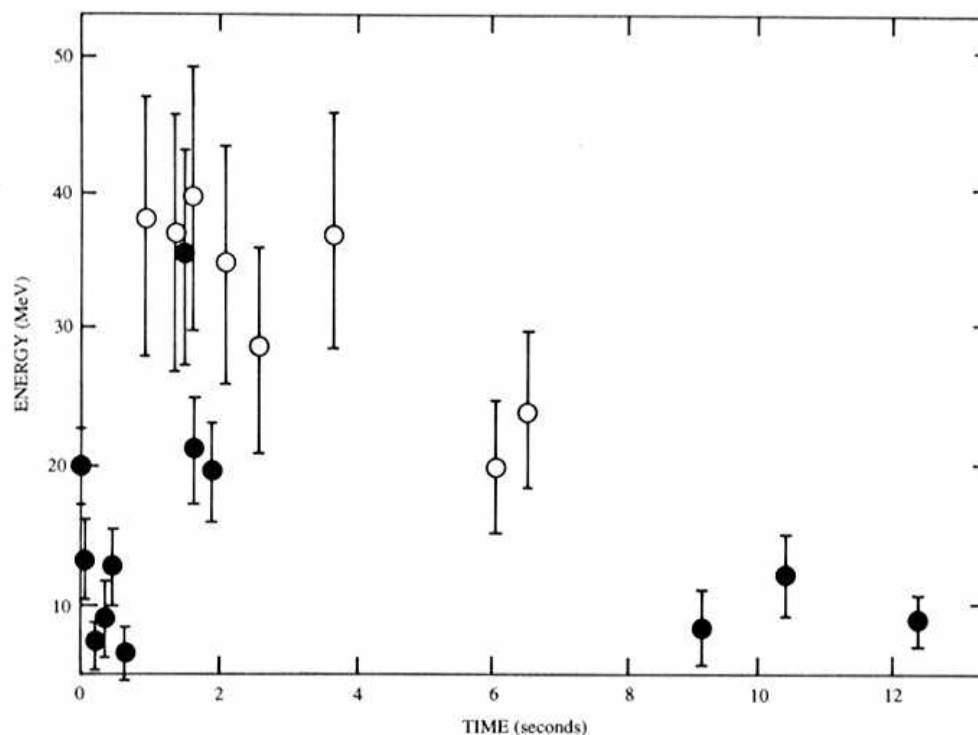
SN 1987A的微中子

- Collapse of a stellar core (XI)

- 偵測微中子不容易，太陽的微中子就是很好的例證。不過恆星內爆所產生的微中子能量很高，偵測較容易
- 人類首次在1987年2月23日偵測到超新星爆炸釋多的微中子，建功的偵測器為神岡二號 (Kamiokande II)和IMB，它們原來的目的是偵測質子衰變
- 結果：測到20個微中子。時間分佈約10秒，所以 $\frac{R^2}{lc} \approx 10 \text{ s}$ ，如 $R = 100 \text{ km}$ ，自由程約為 $10^{-4} R$
- 考慮偵測效率和其距離50 kpc，推算得之 ν_e 微中子總能量 $0.3 \times 10^{46} \text{ J}$ 到 $0.5 \times 10^{46} \text{ J}$ ，大約是中子星束縛能的六分之一！
- 微中子之能量和 $T_e \approx 5 \times 10^{10} \text{ K}$ 的黑體所發出的微中子吻合，從(1.35)式，

$$T_e \approx \left[\frac{\bar{l}}{R} \right]^{1/4} T_I$$

反推得內部溫度為 10^{11} K 到 10^{12} K



中子星內的物質

- Neutron stars (I)

- 據理論推斷，中子星剛誕生時的溫度介於 10^{11} K到 10^{12} K之間，因微中子冷卻的效應，一天後溫度降到 10^9 K，100年後降到 10^8 K。對極高密度的物質來說，這些溫度都極低溫，所以中子星內的中子、質子、電子都是高度簡併的量子氣體，粒子都在最低能量狀態。
- 現在的物理對 $\rho_c = 2.3 \times 10^{17}$ kg/m³以下核物質的特性，有很好的了解和掌握，密度更高時，原子核開始溶解，形成高度簡併的中子、質子、和電子氣體
- 在中子星內，中子無法衰變，除非 $e_F(n) > e_F(p) + e_F(e)$ 。同樣的，質子捕獲電子的中子化過程也要 $e_F(p) + e_F(e) > e_F(n)$ 才能發生。

▪ 中子星為何稱為中子星？

如上述兩個條件吻合， $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ & $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$ ，都可以發生。而

$$m_p c^2 \approx m_n c^2 \approx 938 \text{ MeV}, \quad p_F = \left[\frac{3n}{8p} \right]^{1/3} h = \left[\frac{3\rho / m_n}{8p} \right]^{1/3} h \approx 2 \times 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s}$$

$p_F c \approx 350 \text{ MeV}$ ，因此，中子和質子可以近似為古典粒子，但電子則是QUR e-gas。

$$e_F(n) \approx m_n c^2 + \frac{p_F(n)^2}{2m_n}; \quad e_F(p) \approx m_p c^2 + \frac{p_F(p)^2}{2m_p}; \quad e_F(e) \approx p_e c$$

- 帶入 $e_F(n) = e_F(p) + e_F(e)$ 中

大質量恆星核心殘骸為何稱為中子星

- Neutron stars (II)

- 如 $n_n = n_p$, 可得

$$e_F(e) + e_F(p) - e_F(n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{3n}{8p} \right]^{1/3} hc + \left[\frac{3n}{8p} \right]^{2/3} \frac{h^2}{2m_p} - \left[\frac{3n}{8p} \right]^{2/3} \frac{h^2}{2m_n} = m_n c^2 - m_p c^2$$

- 反應平衡時, $m_e + m_p = m_n$

$$m_e c^2 - kT \ln \left[\frac{g_e n_{Qe}}{n_e} \right] + m_p c^2 - kT \ln \left[\frac{g_p n_{Qp}}{n_p} \right] = m_n c^2 - kT \ln \left[\frac{g_n n_{Qn}}{n_n} \right]$$

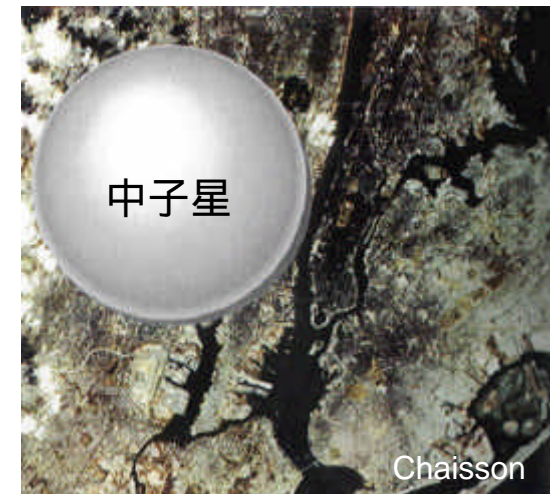
$$n_p^2 = 2n_{Qe}n_n \exp[1.3/8.63] \xrightarrow{T=10^{11} K} n_p \approx 10^{41} \text{ 1/m}^3 \approx n_n / 1000$$

- 所以稱為中子星是很恰當的名稱

奇特的中子星

中子星的質量是太陽的二到三倍之間，而物質的密度可能和原子核物質 (10^{17} kg/m^3) 差不多，可以反推出中子星的直徑大約為20公里，它的大小和台南市這種中等城市差不多。中子星另一項很有趣的特色是它們的磁場都很強，典型的中子星磁場有地球磁場的十億倍左右。

天文學家最近發現宇宙中還有一種具有超強磁力的中子星，這種稱為磁星的天體，產生的磁場比地球要強1000兆倍(1後面有15個零)！如果把這麼強大的磁鐵，放在地球和月球的中間，這個“磁鐵”會很輕易把你的信用卡消磁，把鋼筆從你的口袋裡吸出來。



中子星的半徑

- Neutron stars (III)

- 假設中子星抵抗重力的內部壓力來源是高度簡併的中子氣體，可以推出中子星核心物質密度、半徑和中子星質量之間的關係。中子星核心的中子密度 $n_n \approx \frac{r_c}{m_n}$

- 仿照處理白矮星的方法 (中子星內部 $Y_n = 1$)

$$P_n = K_{QNR} n_n^{5/3} = K_{QNR} \left[\frac{r_c}{m_n} \right]^{5/3}; \quad K_{QNR} = \frac{h^2}{5m_n} \left[\frac{3}{8p} \right]^{2/3}$$

$$K_{QNR} \left[\frac{r_c}{m_n} \right]^{5/3} \approx \left[\frac{p}{36} \right]^{1/3} GM^{2/3} r_c^{4/3}$$

$$r_c \approx 3.1 \left[\frac{M}{M_*} \right]^2 \frac{m_n}{(h/m_n c)^3} \begin{cases} a_G = \frac{Gm_n^2}{\hbar c} \\ M_* = a_G^{-3/2} m_n = 1.85 M_{sun} \end{cases}$$

- 因為現在為QNR n-gas，所以 $r_c = 6 < r >$

$$R = \left[\frac{3M}{4p < r >} \right]^{1/3} \approx 0.77 \left[\frac{M_*}{M} \right]^{1/3} a_G^{-1/2} \frac{h}{m_n c}; \quad a_G^{-1/2} \frac{h}{m_n c} \approx 17 \text{ km}$$

- 所以中子星的半徑約為10 km左右。(這個數值僅供參考，因為中子間的作用很強，而此如此高密度物質的特性我們的了解非常短缺)

中子星的重力束縛能

- Neutron stars (IV)

▪ (6.60)式 $R \approx 0.77 \left[\frac{M_*}{M} \right]^{1/3} a_G^{-1/2} \frac{h}{m_n c} = 0.77 \left[\frac{M_*}{M} \right]^{1/3} \frac{GM_* m_n}{\hbar c} \frac{h}{m_n c} = 0.77 * 2p \left[\frac{M_*}{M} \right]^{4/3} \frac{GM}{c^2}$

$$\frac{GMm/R}{mc^2} = \frac{GM}{Rc^2} \approx 0.2 \left[\frac{M}{M_*} \right]^{4/3} \begin{cases} a_G = \frac{Gm_n^2}{\hbar c} \\ M_* = a_G^{-3/2} m_n = \frac{m_n}{a_G \cdot a_G^{1/2}}; \quad a_G^{-1/2} = \frac{GM_* m_n}{\hbar c} \end{cases}$$

▪ 上式比較質量為 m 的質點，在中子星表面所具有的重力位能和其靜態質量之比值，可見中子星的質量比 $1.85M$ 時，牛頓的重力理論還是能提供很有的描述。

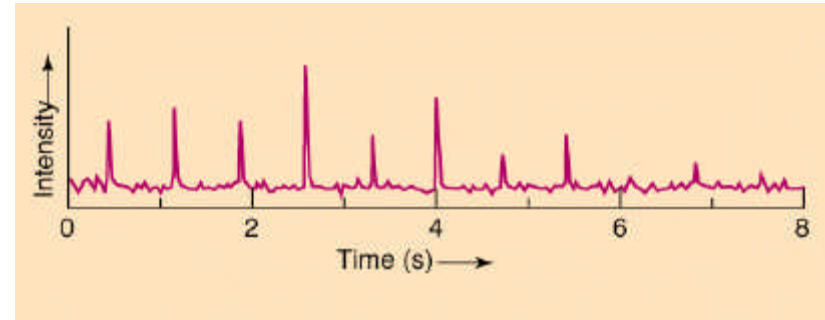
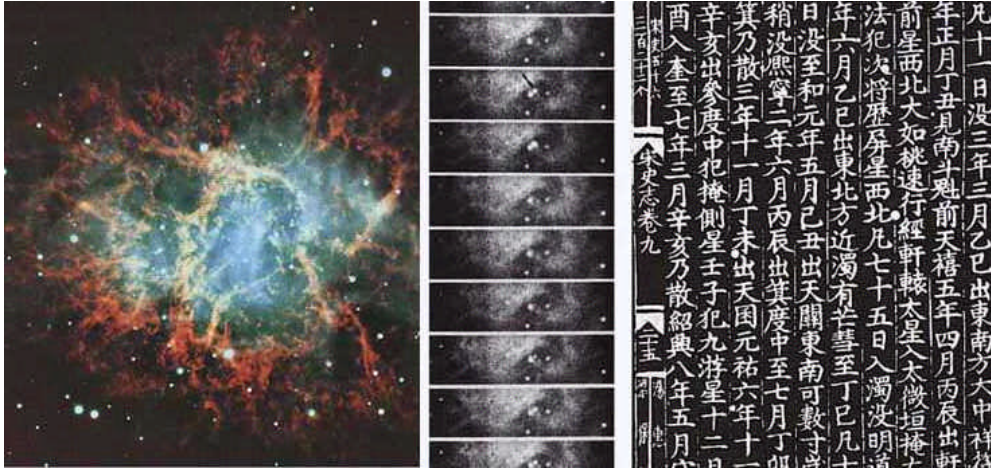
中子星的重力束縛能

$$E_B \approx \frac{GM^2}{R} = 0.2 \left[\frac{M}{M_*} \right]^{4/3} c^2 M \frac{M_*}{M_*} = 0.2 \left[\frac{M}{M_*} \right]^{7/3} M_* c^2 \approx 7 \times 10^{46} \left[\frac{M}{M_*} \right]^{7/3} J$$

▪ 這個結果和前面曾算過的中子星束縛能差不多。對質量小於 $1.85M$ 中子星，束縛能小於靜態能量，不過對大質量的中子星來說，相對論效應就變得很重要

中子星/波霎的歷史

- Neutron stars (V)



金牛座蟹狀星雲、波霎在可見光波段的亮度變化、及 宋史天文志天關客星的記錄。

波霎(中子星)的發現

1932年發現中子之後，朱維基和巴德認為恆星在發生超新星爆炸後，可以產生完全由中子所組成的天體，不過想法未受重視。1967年，年輕的研究生貝爾，在量測天空中的電波源時，意外地量到一種具有很高規律性的訊號，每1.337秒重覆一次，這種神祕的天體就被稱為波霎。天文學家從開始就懷疑波霎可能和超新星有關，後來在找到蟹狀星雲中心的波霎後，再根據星雲膨脹的速度，倒推出它的年齡大約有900多年，並從我國《宋史》中找到「天關客星」的記錄，為波霎和超新星的關聯找到了強而有力的證據。

天關客星與蟹狀星雲

根據史書的記錄，北宋至和元年五月己丑日(西元1054年7月4日)，東方的天空突然出現一顆很亮的客星，它的顏色赤白，光芒四射，亮度幾乎和金星差不多，經過643天才消失。它的位置在畢宿的東北，靠近天關星(金牛座ζ星)的地方，因此被稱為「天關客星」。1731年，西方天文學家在天關客星的位置，發現了一個瀾漫星雲，因為它的形狀像一隻螃蟹，所以就被命名為蟹狀星雲。天文學家認為天關客星是一顆超新星，蟹狀星雲就是爆炸所拋射出去的恆星物質，而星雲中心的波霎是一顆正在快速自轉的中子星。

中子星的轉動

- Neutron stars (VI)

- 中子星最大角速度為質點重量與離心力相等 $\frac{GM}{R^2} = \omega_{\max}^2 R$; $t_{\min} = \frac{2\pi}{\omega_{\max}} = 2\pi \left[\frac{R^3}{GM} \right]^{1/2}$

- 引入(6.60)式

$$t_{\min} = 2\pi \left[\frac{R^3}{GM} \right]^{1/2} = 2\pi \left[\frac{(0.77)^3 \left(\frac{M_*}{M} \right) a_G^{-3/2} \left(\frac{h}{m_n c} \right)^3}{GM} \right]^{1/2} = 2\pi \left[\frac{(0.77)^3 \left(\frac{M_*}{M} \right) \frac{M_*}{m_n} \left(\frac{h}{m_n c} \right)^3}{GM} \right]^{1/2}$$

$$t_{\min} = 2\pi \left[\left(\frac{M_*}{M} \right)^2 (0.77)^3 \frac{1}{G m_n} \left(\frac{h}{m_n c} \right)^3 \right]^{1/2} = 0.6 \left[\frac{M_*}{M} \right] \text{ms}$$

- 自轉週期可以短到1 ms以下！

$$\Leftarrow R \approx 0.77 \left[\frac{M_*}{M} \right]^{1/3} a_G^{-1/2} \frac{h}{m_n c}$$

- 轉動 ($I = 2/5 MR^2$)

$$I \approx 0.24 \left[\frac{M}{M_*} \right]^{1/3} a_G^{-5/2} m_n \left[\frac{h}{m_n c} \right]^2 = \left[\frac{M}{M_*} \right]^{1/3} 2.5 \times 10^{38} \text{ kg m}^2$$

- 蟹狀星雲波霎： $\omega = 190 \text{ s}^{-1}$ ，而 $\frac{d\omega}{dt} = -2.4 \times 10^{-9} \text{ s}^{-2}$

相當於每90年自轉週期增加1 ms

中子星的磁場

- Neutron stars (VII)

- 中子星轉動動能減少率 $\frac{dE_{rot}}{dt} = \frac{d\frac{1}{2}I\omega^2}{dt} = I\omega \frac{d\omega}{dt}$ $\xrightarrow{\text{if } I=10^{38} \text{ kg}\cdot\text{m}^2} = 4.6 \times 10^{31} \text{ W}$

蟹狀星雲的光度估計為 $5 \times 10^{31} \text{ W}$ ，所以星雲的能源很可能是來自波霎所損失的動能

- 波霎輻射能量的可能機制？可能是磁偶極輻射 (magnetic dipole radiation)，如磁偶極矩為 m ，磁傾角 q ，角速度 ω ，輻射功率為

$$P = \frac{2}{3c^3} \left[\frac{m_0}{4\pi} \right] m^2 \omega^4 \sin^2 q$$

- 如果磁偶極輻射真得是波霎的能源 ($L \sim 5 \times 10^{31} \text{ W}$)，

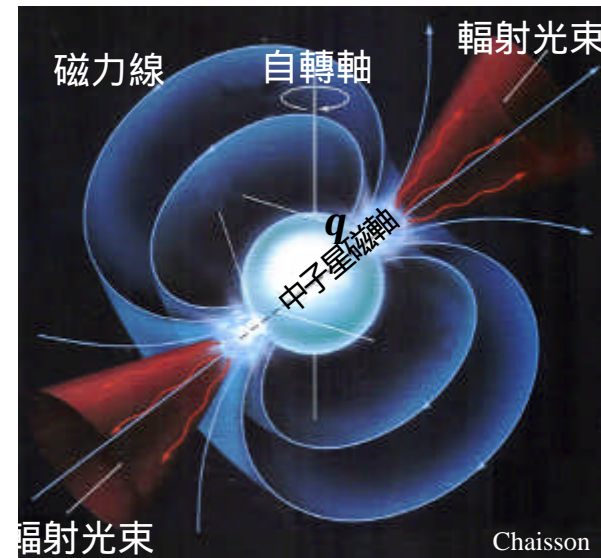
$$m \sin q \approx 4 \times 10^{27} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

- 中子星表面的磁場強度估計為

$$B \approx \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} \approx 10^8 \text{ T}$$

- 磁能密度估計為 $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = 4 \times 10^{21} \text{ J/m}^3$

- 蟹狀星雲波霎很可能是經由磁偶極輻射機制輻射能，其他證據之一是年齡的估算，見下頁。



蟹狀星雲波霎的年齡

- Neutron stars (VIII)

- 如蟹狀星雲波霎是經由磁偶極輻射釋能， $\frac{dE_{rot}}{dt} = I\omega \frac{d\omega}{dt}$ if through m-dipole rad. $\rightarrow \propto \omega^4$

- 角速度的變率

$$\frac{d\omega}{dt} = -C\omega^3 \quad \omega=190 \text{ s}^{-1} \text{ and } d\omega/dt = -2.4 \times 10^{-9} \text{ s}^{-2} \rightarrow C = 3.5 \times 10^{-16} \text{ s}$$

- 年齡： $dt = -\frac{d\omega}{C\omega^3} \Rightarrow t = -\int_{\omega_i}^{\omega} \frac{d\omega'}{C\omega'^3} = \frac{1}{2C} \left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_i^2} \right]$

如假設剛誕生時的角速度很大，帶入現在的角速度，可以得到蟹狀星雲年齡的上限

$$t > \frac{1}{2C\omega^2} = 4 \times 10^{10} \text{ s} = 1253 \text{ years}$$

- 初角速度：從天關客星已誕生了1993 – 1054 = 939 年(初版撰稿年)，和這個估計的上限吻合，另外也可以反推得初角速度 $\omega_i = 400 \text{ s}^{-1}$ ，相當於起初的週期是 ~16 ms。
- 請注意！這些計算都很粗糙，除了中子星的物理極複雜，且還有許多未知之外，波霎的轉速也不是均勻的減速。例如：蟹狀星雲波霎在1989年8月29日，轉速突然增加了3 ns！

中子星的質量上限

- Neutron stars (IX)

- 中子星的物理有許多不確定處，要動到廣義相對論，不過以下的計算指出它的質量會有上限!較精確的計算指出應介於 $2.5 M$ 到 $3 M$ 之間。(類似 6.7, 6.8, 6/9 式)

$$P_n = K_{QUR} n_n^{4/3} = K_{QUR} \left[\frac{Y_n r_c}{m_n} \right]^{4/3}; \quad K_{QUR} = \frac{hc}{4} \left[\frac{3}{8p} \right]^{1/3} \text{ and } Y_n = 1$$

$$K_{QUR} \left[\frac{r_c}{m_n} \right]^{1/3} \approx 0.36 GM^{2/3} r_c^{4/3}$$

$$M_{CH} = \left[\frac{1}{0.36} \right]^{1/2} \left[\frac{Y_n}{m_n} \right]^2 \left[\frac{K_{QUR}}{G} \right]^{3/2} = 3.1 M_* = 5.8 M_{sun}$$

- 上面這個上限偏高，因為我們忽略高密度中子星物質內的中子和中子之間的交互作用。高能且高度簡併的中子氣，會產生hyperons和pions。高能中子和這些相對論性粒子的出現會造成壓力的降低，抵消核力短程排斥力的效用，導致質量上限的降低。
- (6.62)式為質量為 m 的質點，在中子星表面所具有的重力位能和其靜態質量之比值，可得見大質量中子星的重力束縛能和其靜態能差不多，也是就說 $\frac{GM}{Rc^2} = 0.2 \left[\frac{M}{M_*} \right]^{4/3}$ (6.62)
 $5.8 M$ 基本上是中子星的靜態質量。

廣義相對論效應

- Neutron stars (X)

- 在中子星的環境裡，應考慮廣義相對論的效應，而這也會降低中子星的質量上限；

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gmr}{r^2} \xrightarrow{\text{general relat.}} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gmr}{r^2} \cdot \frac{(1 + P/rc^2)(1 + 4pr^3P/mc^2)}{(1 - 2Gm/rc^2)}$$

- 上式中，牛頓重力理論中的重力場，修正成廣相中的能量-動量張量。因此，緻密天體周圍的重力場來自能量和壓力。上式中的 $m(r)c^2$ 為半徑 r 球體內的能量， $r(r)c^2$ 為半徑 r 球體內的能量密度。出現在上式右方的壓力 P ，壓力的增加反而最後造成中子星的自毀，因為崩潰在高壓時反而變得更容易。
- 上式的解法是猜含有中子相互作用的中子物質狀態方程式 $P = P(r)$ ，積分的上下限是 $r(r=0) = r_c$ 到 $r(r=R) = 0$ 。對每一個 r_c ，都能找到一組對應的半徑 R 和質量 M ，也能找到讓中子星發生崩潰的質量上限。
- 第一個以這個式子為起點的計算是 Oppenheimer & Volkoff (1939)，所得到的質量上限是 $0.7 M$ 。他們的結果會差這麼多的原因是他們的中子氣是極端相對論性，不過真正會發生相對論性重力強化的能量，是能量一般的相對論性中子。
- 現在一般認為中子星的上限介於介於 $2.5 M$ 到 $3 M$ 之間。

簡易的中子星模型

- Neutron stars (XI)

- 考慮一個具有均勻質量密度 ρ_0 的中子星，先由牛頓重力理論上手， $\frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{r^2}$ (6.67)

$$P(r) = -\int_R^r \frac{G \frac{4}{3} \pi r'^3 \rho_0^2}{r'^2} dr' = G \frac{2\pi}{3} \rho_0^2 (R^2 - r^2)$$

$$P_c = G \frac{2\pi}{3} \rho_0^2 R^2 = \left[\frac{\rho_0}{6} \right]^{1/3} GM^{2/3} \rho_0^{4/3}; \quad M \equiv m(R)$$

如預期的，牛頓重力理論並沒有質量上限的問題。

- 如從 (6.78) 著手， $\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \frac{(1 + P/rc^2)(1 + 4\pi r^3 P/mc^2)}{(1 - 2Gm/rc^2)}$ (6.78)

$$P(r) = \rho_0 c^2 \left[\frac{(1 - 2GMr^2/R^3 c^2)^{1/2} - (1 - 2GM/Rc^2)^{1/2}}{3(1 - 2GM/Rc^2)^{1/2} - (1 - 2GMr^2/R^3 c^2)^{1/2}} \right]$$

$$P_c = \rho_0 c^2 \left[\frac{1 - (1 - 2GM/Rc^2)^{1/2}}{3(1 - 2GM/Rc^2)^{1/2} - 1} \right]$$

只有在 $\frac{GM}{Rc^2} < \frac{4}{9}$ 時，核心壓力才是有限的

- 把中子質量引進來

$$\rho_0 = \frac{m_n}{4\pi/3 r_n^3} = \frac{3m_n}{4\pi r_n^3}; \quad \& \quad r_n = f_n \frac{h}{m_n c}$$

簡易模型的中子星質量上限

- Neutron stars (XII)

- 已知一般的原子核物質 $\rho_{\text{nuc}} = 2.3 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$ ，相對應的 $f_n = 0.9$
- 因此可得中子星的質量上限為

$$M_{\text{max}} = \left[\frac{8\rho f_n}{9} \right]^{3/2} M_{\odot} \approx 4M_{\odot} \approx 7M_{\oplus}$$

- 上面這些計算再再地告訴我們，就像核物質這種非常不具壓縮性的物質，在夠強大的重力之下，還是會發生塌縮！
- 簡易的廣義相對論結果指出，由中子星有其質量上限。如果超過質量上限，其內中子氣體所產生的壓力也無法抵抗重力的擠壓，會發生塌陷。不過質量上限為何，和所採用的核物質密度有關。例如： $\rho_{\text{nuc}} = 4.6 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$ ，相對應的 $f_n = 0.7$ ，所得的質量上限變成 $2.7 M_{\odot}$ 或 $5 M_{\oplus}$ 。
- 結論：我們用牛頓重力理論和廣義相對論結合簡易中子星模型，均得出中子星有質量上限，雖然數值結果有異。較完整的計算認為中子星的質量上限介於 $2.5 M_{\odot}$ 到 $3 M_{\odot}$ 之間。
- 質量超過 $3 M_{\odot}$ 的中子星會重力塌縮成黑洞。

恆星黑洞

- Black holes (I)

- 黑洞嚴格來說是一種時間結構，只要能把質量M壓縮到它的史瓦半徑 (Schwarzschild radius)以，則史瓦半徑以內的空間就是一個黑洞。

$$R_{sch} = \frac{2GM}{c^2}$$

- 所以如能把太陽的半徑壓縮到3公里以下，它會成為一個黑洞！
- (6.27)重力紅位移的式子

$$\frac{\Delta I}{I} = \left[1 - \frac{2GM}{Rc^2} \right]^{-1/2} - 1 = \left[1 - \frac{R_{sch}}{R} \right]^{-1/2} - 1$$

R 接近史瓦半徑時，紅位移變成無窮大，光的頻率變成零，不再帶有能量，無法逃脫

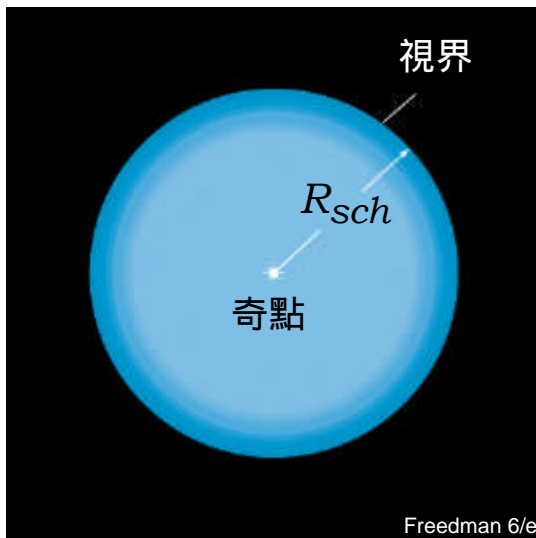
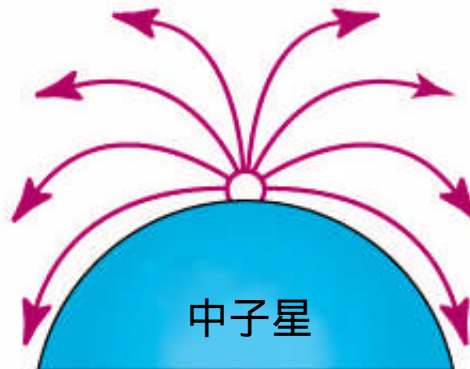
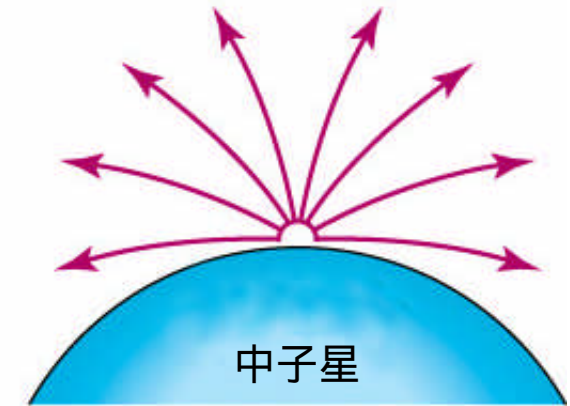
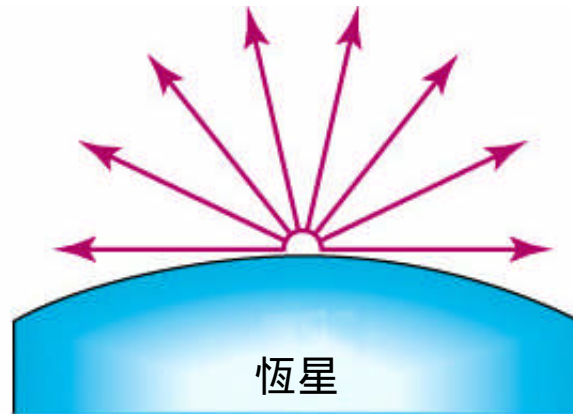
- 大質量恆星核心重力塌縮所形成的黑洞稱為恆星黑洞 (stellar black holes)，以和球狀星團的中質量黑洞，星系核心的超大質量黑洞有所區隔。
- 除非你真得懂黑洞(如Stephen W. Hawking之流)，否則最好不要在未來演講時談黑洞，一般聽眾對這些有絕對的興趣，問題千奇百怪而且沒完沒了。縱然Hawking開講，他的想法和推論你也最好存疑，因為絕大部份是無法驗證，真偽難辨！

黑洞的形成

- Black holes (II)

黑洞是什麼？

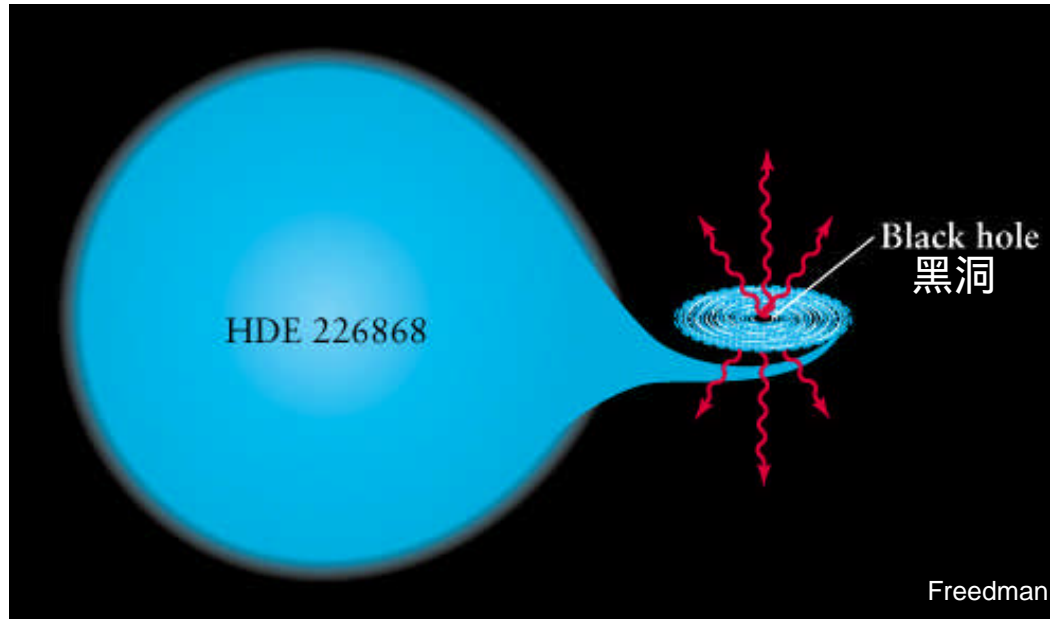
隨著恆星的體積減少，它表面的重力也愈來愈強，要從它的表面逃離的逃脫速度也愈來愈高。當它縮小到粒子逃離速度和光速相同時，連光都無法從表面逃出，它就和外面完全失去聯繫，這種新天體的半徑就稱為史瓦半徑(Schwarzschild radius)，由這個半徑所畫出的球面是事件界面(event horizon)。對所有物質而言，事件界面很像是一個單向膜，只准進不准出，因此，在事件界面之內的區域，就稱為黑洞。



Freedman 6/e

恆星黑洞的偵測 – hard x-ray emission

- Black holes (III)

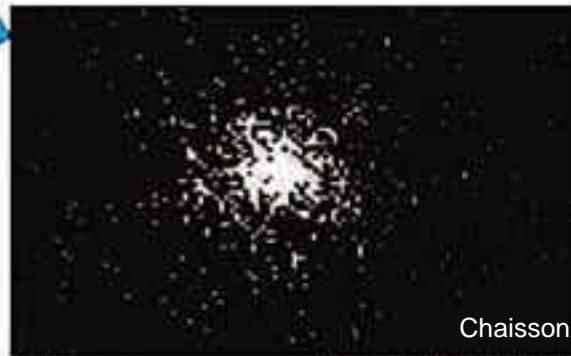


如何觀測到黑洞呢？

黑洞不發光，會吞噬所有的物質和輻射，目前無法直接看到黑洞，只能找它所產生的效應。天文學家目前主要在雙星系統裡找恆星黑洞。因為位在雙星系統內的黑洞，會吸積伴星的物質，在它的周圍會形成拱星盤，當拱星盤的物質迴旋掉向黑洞時，物質摩擦而產生高熱，會發出強烈的X射線輻射。所以，只要找到具有X射線輻射源的雙星系統，如果再推算出這個X射線源的質量是太陽的三倍以上，那麼它就有可能是黑洞。利用這種方法，天文學家找到16顆恆星黑洞，並以每年一顆的速度在增加之中。成大物理系和中大天文所的研究團隊，目前使用鹿林天文台的一米望遠鏡進行雙星系統爆發現象的研究，目的就是要尋找黑洞。



(a) HDE 226868



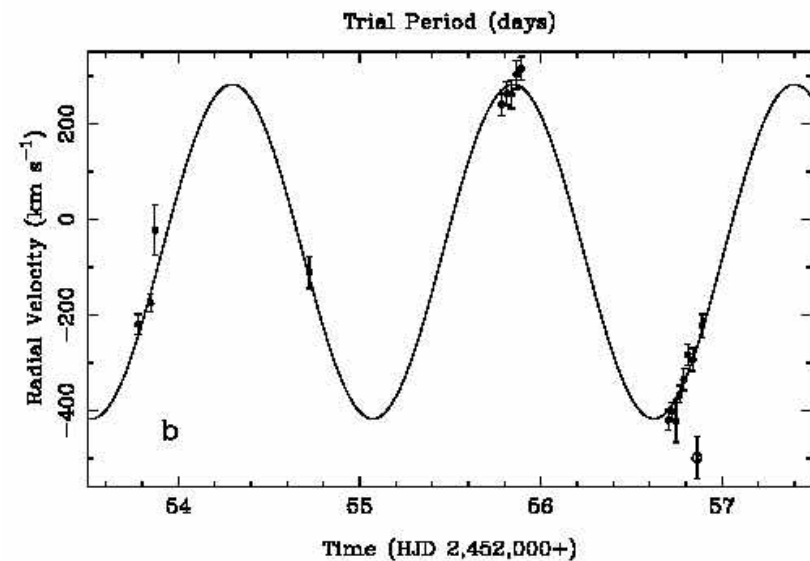
(b) Cygnus X-1



恆星黑洞的偵測 – x-ray outbursts

- Black holes (IV)

- How to measure the stellar mass in a binary system?
 - Kepler's 3rd law
 - Mass function:
$$f(M) \equiv \frac{(M_c \sin i)^3}{(M_c + M_d)^2} = \frac{P_{orb} K_d^3}{2p G}$$
 - 其中 P_{orb} 與 K_d 都是「可量測量」，透過光譜觀測便可以決
 - Mass function is a lower bound of the stellar mass.
 - 只需要估算 M_d 與軌道傾角 i ，便可以決定主星質量 M_c 。
 - 軌道傾角 i ，可以透過光變曲線的擬合來估計。
 - M_d 可以透過兩者速度比求 M_c 得 M_d 和的比值。或是透過光譜決定伴星的光譜型態後再行估計其質量。
- If the mass excesses $3M_{\odot}$, the upper limit of the neutron star, the object will be identified as a black hole.



XTE J1550-564之徑向速度曲線

Orosz et al., 2002, ApJ, 568, 845

目前已確定的恆星黑洞

- Black holes (V)

- 高質量X射線雙星系統(HMXB)中，確定的恆星黑洞有 (部份名單)

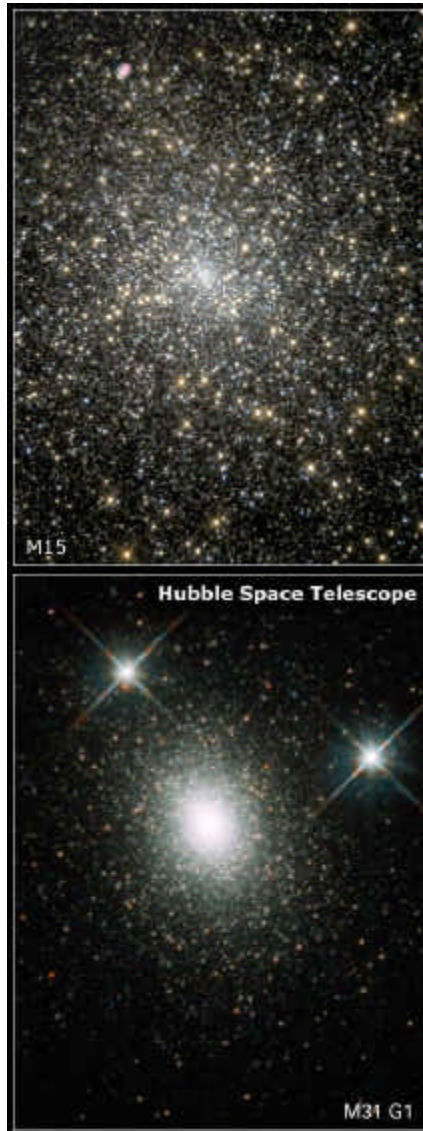
Cygnus X-1、 A0620-00、 V404 Cygni、 LMC X-1、 LMC X-3 and certainly more to come...

- 在低質量X射線雙星系統(LMXB)中，1992年當時僅有三個被確認是黑洞，兩個是極可能，目前(2003年5月)已有十六個以上。低質量雙星系統內的黑洞，目前大約以每年1~2個左右被發現。

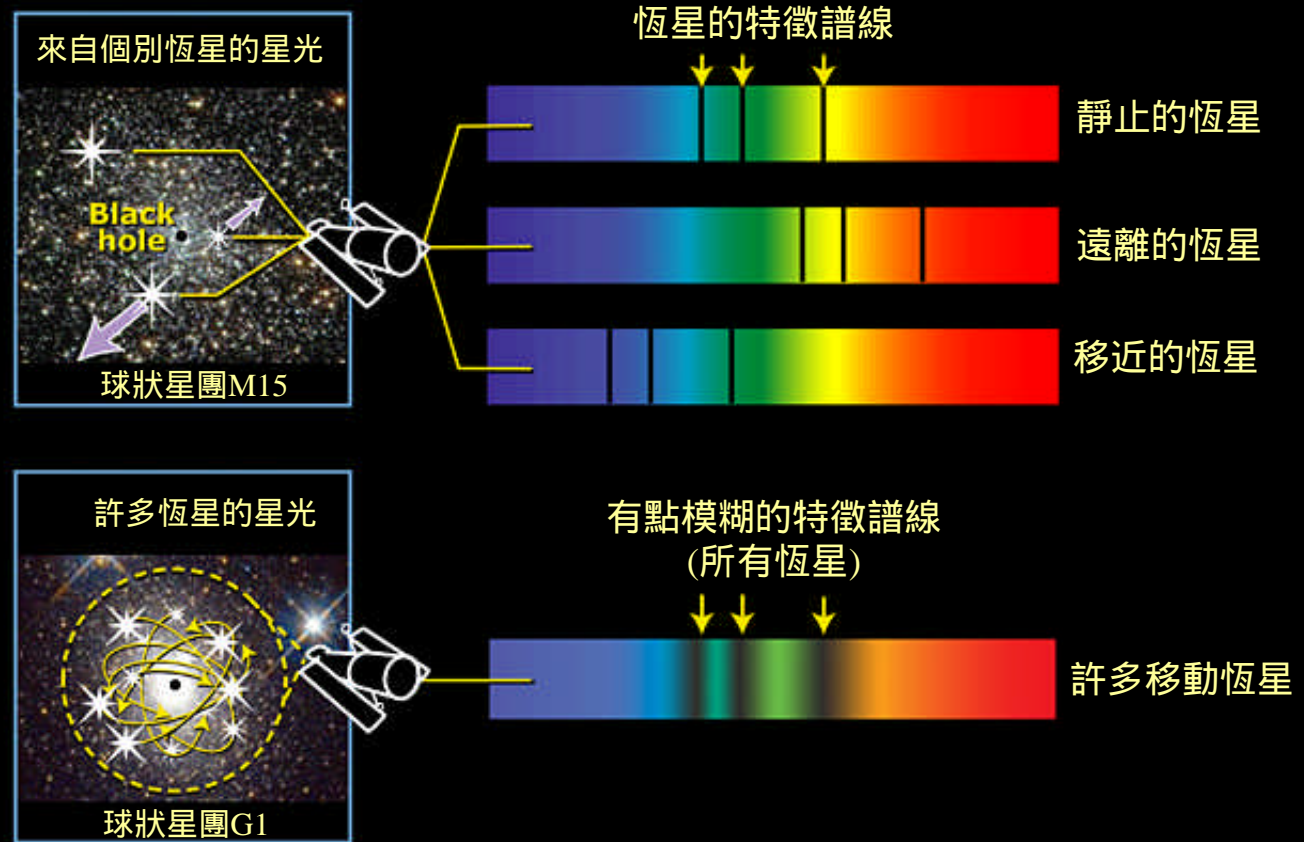
- 3U 0042+32 (?)
- GRO J0422+32
- 4U 0538-64
- CAL 87
- 4U 0540-69
- A0620-00
- GRS 1009-45
- GS1124-683
- GS1354-64 (?)
- 1A1524-62 (?)
- 4U 1543-47
- XTE J1550-564
- 4U 1630-472 (?)
- GRO J1655-40
- H1705-250
- GRS1716-249 (?)
- XTE J1819-254
- EXO 1846-031 (?)
- GRS 1915+105
- 4U 1918+146 (?)
- 4U 1956+35
- GS2000+25
- GS2023+338

球狀星團中心的中型黑洞

- Black holes (VI)



哈伯太空望遠鏡量測黑洞的兩種方法

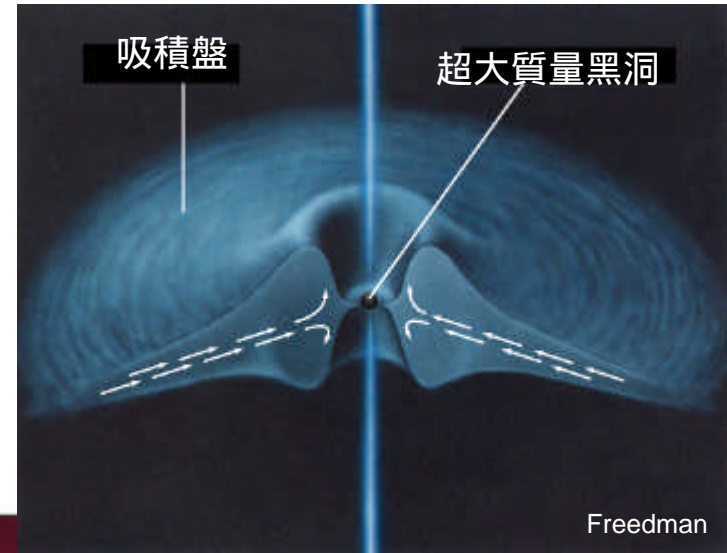


HST/NASA

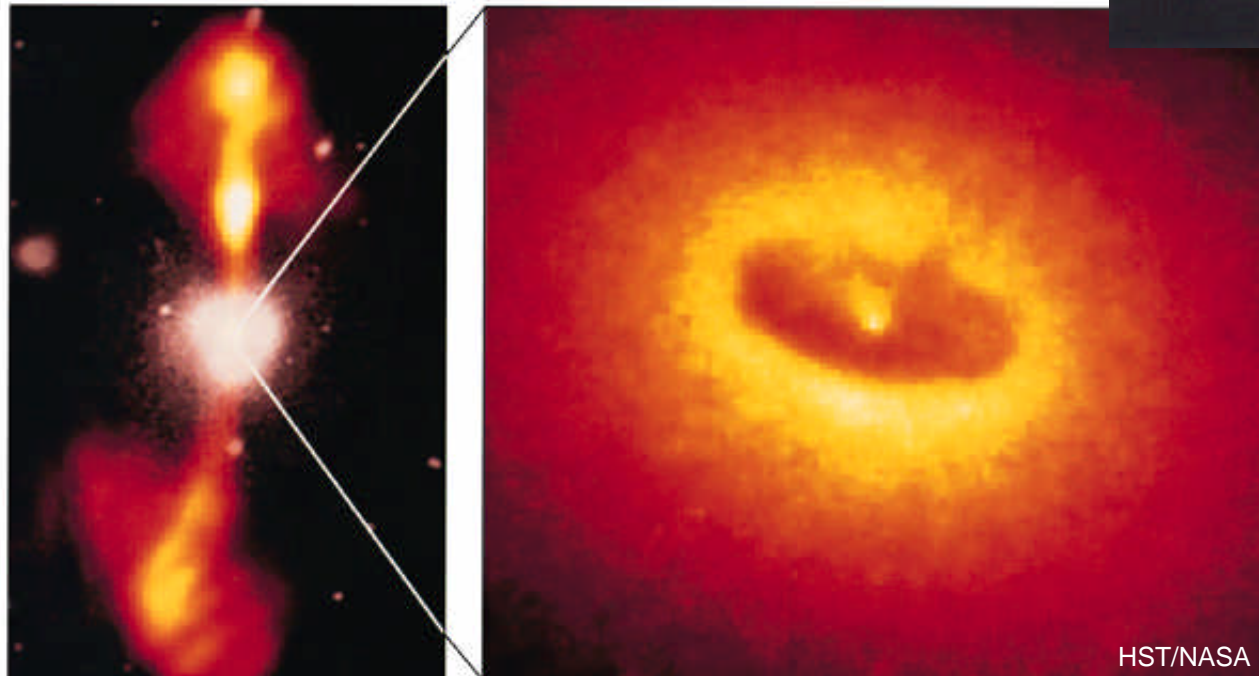
量測的結果顯示球狀星團M15內有顆質量是太陽2000倍的黑洞，而球狀星團G1的內部有顆二萬倍太陽質量的黑洞。

星系核心的超大質量黑洞

- Black holes (VII)



星系核心黑洞的示意圖



橢圓星系NGC 4261的核心，可能藏著一顆質量超過百萬太陽質量的超大質量黑洞。它除了造成吸積盤，也使星系在電波波段有個強烈的輻射瓣。

黑洞動物園

- Black holes (VIII)

黑洞質量與所在天體系統質量的關係圖

